

一类偶数阶中立型泛函偏微分系统的振动准则*

罗李平, 罗振国, 杨 柳
(衡阳师范学院统计学院, 湖南 衡阳 421002)

摘 要: 考虑一类具连续滞量和非线性扩散项的偶数阶中立型泛函偏微分系统, 利用一种基于一类核函数 $\Phi(t, s, r)$ 和 Riccati 变换的新技巧, 建立了该类系统在 Robin 边值条件下所有解振动的若干新的充分条件。

关键词: 振动性; 泛函偏微分系统; 偶数阶; 中立型; 核函数

中图分类号: O175.4 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579 (2015) 06-0050-05

Oscillation Criteria of Certain Even Order Neutral Functional Partial Differential Systems

LUO Liping, LUO Zhenguo, YANG Liu

(College of Mathematics and Statistics, Hengyang Normal University, Hengyang 421002, China)

Abstract: A class of even order neutral functional partial differential systems with continuous delay and nonlinear diffusion term is studied. By using a new technique based on a class of kernel functions $\Phi(t, s, r)$ and Riccati's transformation, some new sufficient conditions for oscillation of all solutions of such systems are established under Robin's boundary value condition.

Key words: oscillation; functional partial differential system; even order; neutral type; kernel function

在自然科学和工程技术研究中, 许多现象都用(偏)微分系统作为其数学模型, 但都是假定事物的变化规律只与当时状态有关, 而与过去历史状态无关。但在实际问题中, 一个系统将来的行为不仅依赖于现在的状态, 也受过去状态的影响。因此, 用传统的(偏)微分系统去描述系统状态只是一种近似, 并不能精确描述, 取而代之的是带有各种滞后量(特别是带时间滞后量)的(偏)微分系统, 被统称为泛函(偏)微分系统。由于泛函(偏)微分系统充分考虑到历史因素(即滞后量)对系统的影响, 故能更精确地描述实际现象, 在物理学、生物数学、经济数学、自动控制、通讯理论等学科领域中都广泛地涉及到它。振动性理论作为泛函偏微分系统定性理论的重要分支之一, 对其展开研究具有重要的理论价值和实用价值。近年来,

关于泛函偏微分系统的振动性研究已取得了一些很好的结果^[1-7], 但关于具连续滞量和非线性扩散项的泛函偏微分系统(尤其是高阶情形)的振动性的研究还不多见。本文的目的是着手研究如下的具连续滞量和非线性扩散项的偶数阶中立型泛函偏微分系统

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ u_i + \int_c^d p(t, \eta) u_i [x, r(t, \eta)] d\tau(\eta) \right\} + \\ & \sum_{j=1}^m \int_a^b q_{ij}(x, t, \xi) u_j [x, g(t, \xi)] d\mu(\xi) = \\ & a_i(t) h_i(u_i) \Delta u_i + \sum_{k=1}^s a_{ik}(t) h_{ik}(u_i(x, \sigma_k(t))) \\ & \Delta u_i(x, \sigma_k(t)), (x, t) \in \Omega \times \mathbf{R}_+ \equiv G, \\ & i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{E}$$

在 Robin 边值条件

* 收稿日期: 2015-04-08

基金项目: 湖南省“十二五”重点建设学科资助项目(湘教发[2011]76); 湖南省自然科学基金青年资助项目(13JJ4098)

作者简介: 罗李平(1964年生), 男; 研究方向: (脉冲)偏微分方程解的性态; E-mail: luolp3456034@163.com

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu} + \beta(x)u_i = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}_+,$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{B})$$

下解的振动性, 其中 $n \geq 2$ 为偶数, Ω 是 \mathbf{R}^M 中具有逐片光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, Δ 是 \mathbf{R}^M 中的 Laplacian 算子, $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$, ν 是 (Ω 的单位外法向量, (E) 中的积分均为 Stieltjes 积分, 通过引进三元函数类 Y , 并结合 Riccati 技巧, 建立了判别边值问题 (E)、(B) 所有解在 G 内振动的不需要借助特征值定理的若干新的充分条件, 所得结果以 $\limsup_{t \rightarrow \infty} [\cdot] > \text{const.}$ 的形式给出, 目前这在国内外同类研究中尚未见报道。

本文中, 如不特别说明, 总假设下列条件成立:

(H₁) $p(t, \eta) \in C(I \times [c, d], \mathbf{R}), I = [t_0, \infty)$, $p(t, \eta) \geq 0, P(t) = \int_c^d p(t, \eta) d\tau(\eta) \leq P < 1, P$ 为常数;

(H₂) $r(t, \eta) \in C(I \times [c, d], \mathbf{R}), r(t, \eta) \leq t,$
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \min_{\eta \in [c, d]} r(t, \eta) = \infty$;

(H₃) $q_{ij}(x, t, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}_+ \times [a, b], \mathbf{R}),$
 $q_{ii}(x, t, \xi) > 0, \bar{q}_{ij}(t, \xi) = \max_{x \in \Omega} |q_{ij}(x, t, \xi)|,$
 $q_{ii}(t, \xi) = \min_{x \in \Omega} \{q_{ii}(x, t, \xi)\}, i, j \in I_m = \{1, 2, \dots, m\},$
 $q(t, \xi) = \min_{i \in I_m} \{q_{ii}(t, \xi) - \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{q}_{ji}(t, \xi)\} \geq 0,$

$Q(t) = \int_a^b q(t, \xi) d\mu(\xi);$

(H₄) $g(t, \xi) \in C(I \times [a, b], \mathbf{R})$ 关于 t 和 ξ 均为非减, $\frac{d}{dt}g(t, a)$ 存在, $g(t, \xi) \leq t, \xi \in [a, b]$, 并且

$\lim_{t \rightarrow \infty} \min_{\xi \in [a, b]} g(t, \xi) = \infty$;

(H₅) $a_i(t), a_{ik}(t) \in C(I, \mathbf{R}_+), \sigma_k(t) \in C(I, \mathbf{R}), \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_k(t) = \infty, k \in I_s$;

(H₆) $h_i(u_i), h_{ik}(u_i) \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+),$
 $u_i h'_i(u_i) \geq 0, u_i h'_{ik}(u_i) \geq 0, i \in I_m, k \in I_s$;

(H₇) $\tau(\eta), \mu(\xi)$ 分别为 $[c, d]$ 和 $[a, b]$ 上非减函数。

1 定义及引理

定义 1 称向量函数

$$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_m(x, t))^T$$

为边值问题 (E)、(B) 的解, 若它在 G 内满足方程组 (E) 且在 $\partial\Omega \times \mathbf{R}_+$ 上满足边界条件 (B)。

定义 2 称数值函数 $v(x, t)$ 在 G 内振动, 若对任意正数 β , 存在点 $(x_0, t_0) \in \Omega \times [\beta, \infty)$, 使得

$v(x_0, t_0) = 0$, 否则, 称为非振动的; 称边值问题 (E)、(B) 的解 $u(x, t)$ 在 G 内振动, 若它至少有一个分量作为数值函数是振动的; 称边值问题 (E)、(B) 的解 $u(x, t)$ 在 G 内非振动, 若它的每一个分量作为数值函数都是非振动的。

定义 3 设 $D = \{(t, s) : t \geq s \geq t_0\}$, 称函数 $H = H(t, s)$ 属于函数类 X , 记作 $H \in X$, 若 $H \in C(D, \mathbf{R})$ 满足: 当 $t \geq t_0$ 时, $H(t, t) = 0$; 当 $t > s \geq t_0$ 时, $H(t, s) > 0$, 并且在 D 上关于 t 和 s 有连续偏导数。

定义 4 设 $E = \{(t, s, r) : t \geq s \geq r \geq t_0\}$, 称函数 $\Phi = \Phi(t, s, r)$ 属于函数类 Y , 记作 $\Phi \in Y$, 若 $\Phi \in C(E, \mathbf{R})$ 满足: 当 $t \geq r \geq t_0$ 时, $\Phi(t, t, r) = \Phi(t, r, r) = 0$; 当 $t > s > r \geq t_0$ 时, $\Phi(t, s, r) > 0$, 并且在 E 上关于 s 有连续偏导数。

设 $\Phi \in Y, g(t) \in C([t_0, \mathbf{R}], \mathbf{R})$, 定义算子 $T[*; r, t]$ 如下

$$T[g; r, t] = \int_r^t \Phi(t, s, r) g(s) ds,$$

$$(t, s, r) \in E \quad (1)$$

函数 $\varphi(t, s, r)$ 定义为

$$\frac{\partial \Phi(t, s, r)}{\partial s} = \varphi(t, s, r) \Phi(t, s, r) \quad (2)$$

注 1 容易验证算子 $T[*; r, t]$ 是线性算子, 并且满足

$$T[g'; r, t] = -T[g\varphi; r, t],$$

$$g(t) \in C^1([t_0, \mathbf{R}], \mathbf{R}) \quad (3)$$

注 2 易知对任意 $H_1, H_2 \in X$, 有 $H_1(t, s)H_2(s, r) \in Y$ 。

引理 1^[8] 设 $y(t) \in C^n(I, \mathbf{R})$ 为常号, 在 I 上 $y^{(n)}(t) \neq 0$ 且满足 $y^{(n)}(t)y(t) \leq 0$, 则

(i) 存在 $t_1 \geq t_0$, 使得 $y^{(i)}(t) (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 在 $[t_1, \infty)$ 上常号;

(ii) 存在 $l \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, n+l$ 为奇数, 使得

$$y^{(i)}(t) > 0, t \geq t_1, i = 0, 1, 2, \dots, l;$$

$$(-1)^{i+l} y^{(i)}(t) > 0, t \geq t_1, i = l+1, \dots, n$$

引理 2^[9] 设 $y(t)$ 满足引理 1 的条件, 且 $y^{(n-1)}(t)y^{(n)}(t) \leq 0, t \geq t_1$, 则对每一 $\theta \in (0, 1)$, 存在常数 $N > 0$, 使得

$$|y'(\theta t)| \geq N t^{n-2} |y^{(n-1)}(t)|, t \geq t_1$$

2 主要结果及其证明

定理 1 若微分不等式

$$W'(t) + \lambda Q(t) + \lambda N g^{n-2}(t, a) g'(t, a) W^2(t) \leq 0,$$

$$t \geq t_0 \quad (4)$$

无最终正解, 其中 $\lambda = 1 - P$, N 是某一正数, 则边值问题 (E)、(B) 的所有解在 G 内振动。

证明 假设边值问题 (E)、(B) 有一个非振动解 $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_m(x, t))^T$, 不失一般性, 不妨设 $|u_i(x, t)| > 0$, $(x, t) \in \Omega \times I$, $i \in I_m$ 。令 $\delta_i = \text{sgn } u_i(x, t)$, $Z_i(x, t) = \delta_i u_i(x, t)$, 则 $Z_i(x, t) > 0$, $(x, t) \in \Omega \times [t_0, \infty)$, $i \in I_m$ 。由条件 (H_2) , (H_4) , (H_5) 知, 存在 $t_1 \geq t_0$, 使得 $Z_i(x, t) > 0$, $Z_i(x, \sigma_k(t)) > 0$, $Z_i[x, r(t, \eta)] > 0$, $Z_j[x, g(t, \xi)] > 0$, $(x, t) \in \Omega \times [t_1, \infty)$, $\eta \in [c, d]$, $\xi \in [a, b]$, $i, j \in I_m, k \in I_s$ 。

问题 (E) 两边关于 x 在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \int_{\Omega} Z_i dx + \int_{\Omega} \int_c^d p(t, \eta) Z_i[x, r(t, \eta)] d\tau(\eta) dx \right\} = \\ a_i(t) \int_{\Omega} h_i(u_i) \Delta Z_i dx + \sum_{k=1}^s a_{ik}(t) \int_{\Omega} h_{ik}(u_i(x, \sigma_k(t))) \cdot \\ \Delta Z_i(x, \sigma_k(t)) dx - \\ \sum_{j=1}^m \frac{\delta_i}{\delta_j} \int_{\Omega} \int_a^b q_{ij}(x, t, \xi) Z_j[x, g(t, \xi)] \cdot \\ d\mu(\xi) dx, t \geq t_1, i \in I_m \end{aligned} \quad (5)$$

交换积分顺序有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_a^b q_{ij}(x, t, \xi) Z_j[x, g(t, \xi)] d\mu(\xi) dx = \\ \int_a^b q_{ij}(x, t, \xi) \int_{\Omega} Z_j[x, g(t, \xi)] dx d\mu(\xi), \\ t \geq t_1, i, j \in I_m \end{aligned} \quad (6)$$

利用 Green 公式, 边界条件 (B) 及 (H_6) , 得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h_i(u_i) \Delta Z_i dx = \\ \int_{\partial\Omega} h_i(u_i) \frac{\partial Z_i}{\partial \nu} dS - \int_{\Omega} \nabla h_i(u_i) \cdot \nabla Z_i dx = \\ - \int_{\partial\Omega} h_i(u_i) \beta(x) u_i dS - \int_{\Omega} \delta_i h'_i(u_i) |\nabla u_i|^2 dx \leq 0, \\ t \geq t_1, i \in I_m \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h_{ik}(u_i(x, \sigma_k(t))) \Delta Z_i(x, \sigma_k(t)) dx \leq 0, \\ t \geq t_1, i \in I_m, k \in I_s \end{aligned} \quad (8)$$

其中 dS 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素。

联合式 (5) - 式 (8), 并注意到条件 (H_3) , (H_5) , 有

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \int_{\Omega} Z_i dx + \int_{\Omega} \int_c^d p(t, \eta) Z_i[x, r(t, \eta)] d\tau(\eta) dx \right\} \leq \\ - \int_a^b q_{ii}(t, \xi) \int_{\Omega} Z_i[x, g(t, \xi)] dx d\mu(\xi) + \\ \sum_{j=1, j \neq i}^m \int_a^b \bar{q}_{ij}(t, \xi) \int_{\Omega} Z_j[x, g(t, \xi)] dx d\mu(\xi), \\ t \geq t_1, i \in I_m \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } V_i(t) = \int_{\Omega} Z_i(x, t) dx, t \geq t_1, i \in I_m, \text{ 显然} \\ V_i(t) > 0, t \geq t_1, i \in I_m, \text{ 于是由式 (9) 有} \\ \{ V_i(t) + \int_c^d p(t, \eta) V_i[r(t, \eta)] d\tau(\eta) \}^{(n)} + \\ \int_a^b q_{ii}(t, \xi) V_i[g(t, \xi)] d\mu(\xi) - \\ \sum_{j=1, j \neq i}^m \int_a^b \bar{q}_{ij}(t, \xi) V_j[g(t, \xi)] d\mu(\xi) \leq 0, \\ t \geq t_1, i \in I_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } V(t) = \sum_{i=1}^m V_i(t), t \geq t_1, \text{ 显然 } V(t) > 0, t \geq t_1, \\ \text{于是上式按 } i = 1, 2, \dots, m \text{ 垂直相加, 可得} \\ \{ V(t) + \int_c^d p(t, \eta) V[r(t, \eta)] d\tau(\eta) \}^{(n)} + \\ \sum_{i=1}^m \int_a^b \{ q_{ii}(t, \xi) V_i[g(t, \xi)] - \\ \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{q}_{ij}(t, \xi) V_j[g(t, \xi)] \} d\mu(\xi) \leq 0, \\ t \geq t_1 \end{aligned} \quad (10)$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_a^b \{ q_{ii}(t, \xi) V_i[g(t, \xi)] - \\ \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{q}_{ij}(t, \xi) V_j[g(t, \xi)] \} d\mu(\xi) = \\ \sum_{i=1}^m \int_a^b \{ q_{ii}(t, \xi) - \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{q}_{ji}(t, \xi) \} V_i[g(t, \xi)] d\mu(\xi) \geq \\ \int_a^b \min_{i \in I_m} \{ q_{ii}(t, \xi) - \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{q}_{ji}(t, \xi) \} \sum_{i=1}^m V_i[g(t, \xi)] d\mu(\xi) = \\ \int_a^b q(t, \xi) V[g(t, \xi)] d\mu(\xi), t \geq t_1 \end{aligned}$$

于是由式 (10) 有

$$\begin{aligned} \{ V(t) + \int_c^d p(t, \eta) V[r(t, \eta)] d\tau(\eta) \}^{(n)} + \\ \int_a^b q(t, \xi) V[g(t, \xi)] d\mu(\xi) \leq 0, t \geq t_1 \end{aligned} \quad (11)$$

令

$$z(t) = V(t) + \int_c^d p(t, \eta) V[r(t, \eta)] d\tau(\eta) \quad (12)$$

则 $z(t) \geq V(t) > 0$, 并且结合式 (11) 有

$$\begin{aligned} z^{(n)}(t) \leq - \int_a^b q(t, \xi) V[g(t, \xi)] d\mu(\xi) \leq 0, \\ t \geq t_1 \end{aligned} \quad (13)$$

于是由引理 1 知, 存在 $t_2 \geq t_1$, 使得 $z'(t) > 0$ 和 $z^{(n-1)}(t) > 0, t \geq t_2$ 。由式 (12) 有

$$\begin{aligned} V(t) = z(t) - \int_c^d p(t, \eta) V[r(t, \eta)] d\tau(\eta) \geq \\ z(t) - \int_c^d p(t, \eta) z[r(t, \eta)] d\tau(\eta) \geq \end{aligned}$$

$$z(t) - \int_c^d p(t, \eta) z(t) d\tau(\eta) = (1 - P(t))z(t) \geq \lambda z(t), \quad t \geq t_2 \quad (14)$$

联合式 (13) 和式 (14) 产生

$$z^{(n)}(t) \leq -\lambda Q(t)z[g(t, a)], \quad t \geq t_2 \quad (15)$$

令

$$W(t) = \frac{z^{(n-1)}(t)}{z[\lambda g(t, a)]}, \quad t \geq t_2 \quad (16)$$

则 $W(t) > 0, t \geq t_2$ 。因 $z(t)$ 是增函数, $g(t, \xi)$ 关于 t 和 ξ 非减, 故存在 $t_3 \geq t_2$, 使得

$$z[g(t, a)] > z[\lambda g(t, a)] > 0, \quad t \geq t_3$$

因 $g(t, a) \leq t$ 和 $\frac{d}{dt}g(t, a) = g'(t, a) > 0$, 故由引理 2 知, 存在 $N > 0$ 和 $t_4 \geq t_3$, 使得

$$z'[\lambda g(t, a)] \geq Ng^{n-2}(t, a)z^{(n-1)}[g(t, a)] \geq Ng^{n-2}(t, a)z^{(n-1)}(t), \quad t \geq t_4 \quad (17)$$

于是由式 (15) - 式 (17) 有

$$W'(t) = \frac{z^{(n)}(t)}{z[\lambda g(t, a)]} - \frac{\lambda g'(t, a)z^{(n-1)}(t)z'[\lambda g(t, a)]}{z^2[\lambda g(t, a)]} \leq$$

$$-\lambda Q(t) - \lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a)W^2(t), \quad t \geq t_4$$

即

$$W'(t) + \lambda Q(t) + \lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a)W^2(t) \leq 0, \quad t \geq t_4 \quad (18)$$

此示 $W(t)$ 是微分不等式 (4) 的一个最终正解, 而这与定理 1 的题设矛盾。证毕。

定理 2 若对任意 $r \geq t_0$, 存在函数 $\Phi \in Y$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} T\left[\lambda Q(t) - \frac{\varphi^2(t, s, r)}{4\lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a)}; r, t\right] > 0 \quad (19)$$

其中算子 T 和函数 $\varphi(t, s, r)$ 分别由式 (1) 和式 (2) 定义, 则边值问题 (E)、(B) 的所有解在 G 内振动。

证明 由定理 1 知, 只需要证明在定理 2 的条件下, 微分不等式 (4) 无最终正解即可。

假设微分不等式 (4) 存在一个解 $W(t)$ 在 $[t_0, \infty)$ ($t_0 > 0$) 上无零点, 不失一般性, 不妨设 $W(t) > 0, t \in [t_1, \infty), t_1 \geq t_0$ 。由不等式 (4) 有

$$\lambda Q(t) \leq -W'(t) - \lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a)W^2(t), \quad t \geq t_1 \quad (20)$$

对式 (20) 应用算子 $T[*; r, t]$ ($t \geq r \geq t_1$), 并利用式 (3) 可得

$$T[\lambda Q(t); r, t] \leq T[W(t)\varphi(t, s, r) -$$

$$\begin{aligned} & \lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a); r, t] = \\ & T\left[-\left(\sqrt{\lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a)}W(t) - \frac{\varphi(t, s, r)}{2\sqrt{\lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a)}}\right)^2 + \frac{\varphi^2(t, s, r)}{4\lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a)}; r, t\right] \leq \\ & T\left[\frac{\varphi^2(t, s, r)}{4\lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a)}; r, t\right] \end{aligned}$$

于是对任意 $t \geq r \geq t_1$, 有

$$T\left[\lambda Q(t) - \frac{\varphi^2(t, s, r)}{4\lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a)}; r, t\right] \leq 0 \quad (21)$$

对式 (21) 取上极限, 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} T\left[\lambda Q(t) - \frac{\varphi^2(t, s, r)}{4\lambda Ng^{n-2}(t, a)g'(t, a)}; r, t\right] \leq 0$$

此与式 (19) 相矛盾。证毕。

注 3 由定理 1 可知, 选择不同的核函数 $\Phi(t, s, r)$, 通过简单的计算, 可得到边值问题 (E)、(B) 不同的振动准则。

若取 $\Phi(t, s, r) = H_1(t, s)H_2(s, r)$, 其中 $H_1, H_2 \in X$ 。由定理 1 可得如下定理。

定理 3 若对任意 $r \geq t_0$, 存在函数 $H_1, H_2 \in X$, 使得

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_r^t H_1(t, s)H_2(s, r) \cdot \\ & \left\{ \lambda Q(s) - \frac{1}{4\lambda Ng^{n-2}(s, a)g'(s, a)} \cdot \right. \\ & \left. \left[-\frac{h_1(t, s)}{\sqrt{H_1(t, s)}} + \frac{h_2(s, r)}{\sqrt{H_2(s, r)}} \right]^2 \right\} ds > 0 \end{aligned}$$

其中 h_1, h_2 定义如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1(t, s)}{\partial s} &= -h_1(t, s)\sqrt{H_1(t, s)}, \\ \frac{\partial H_2(s, r)}{\partial s} &= h_2(s, r)\sqrt{H_2(s, r)} \end{aligned} \quad (22)$$

h_1, h_2 在 D 上局部可积, 则边值问题 (E)、(B) 的所有解在 G 内振动。

若取 $\Phi(t, s, r) = \rho(s)(t-s)^\alpha(s-r)^\beta$, 其中 $\rho(s) \in C^1(I, \mathbf{R}_+)$, $\alpha, \beta > 1$ 为常数。由定理 1 可得如下定理。

定理 4 若对任意 $r \geq t_0$, 存在函数 $\rho(s) \in C^1(I, \mathbf{R}_+)$ 和常数 $\alpha, \beta > 1$, 使得

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_r^t \rho(s)(t-s)^\alpha(s-r)^\beta \cdot \\ & \left\{ \lambda Q(s) - \frac{1}{4\lambda Ng^{n-2}(s, a)g'(s, a)} \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\beta t - (\alpha + \beta)s + \alpha r}{(t-s)(s-r)} \right]^2 ds > 0$$

则边值问题 (E)、(B) 的所有解在 G 内振动。

注 4 我们可以看到, 定理 2 - 定理 4 中的结果都包含系数 p 和 q_{ij} 的积分, 因此需要系数在整个区间 I 上的信息。然而根据 Stum 分离定理, 振动性仅仅是一个区间性质。因此, 下面对边值问题 (E)、(B) 的区间振动性质做进一步的研究, 建立了几个新的区间振动准则, 这些准则仅仅是基于系数在 I 的一系列子区间上的信息。

定理 5 若对任意 $r \geq t_0$, 存在函数 $\Phi \in Y$ 和常数 $v > u \geq r$, 使得

$$T \left[\lambda Q(t) - \frac{\varphi^2(v, s, u)}{4\lambda N g^{n-2}(t, a) g'(t, a)}; u, v \right] > 0$$

其中算子 T 和函数 $\varphi(v, s, u)$ 分别由式 (1) 和式 (2) 定义, 则边值问题 (E)、(B) 的所有解在 G 内振动。

证明 同定理 2 的证明, 将其中的 t, r 分别用 v 和 u 替换, 容易看到微分不等式 (4) 的每一个解在区间 (u, v) 中至少有一个零点, 即不等式 (4) 的每一个解在 I 上有任意大的零点, 因此微分不等式 (4) 无最终正解。由定理 1 知, 边值问题 (E)、(B) 的所有解在 G 内振动。证毕。

类似于注 3 的讨论, 可得如下结果。

定理 6 若对任意 $r \geq t_0$, 存在函数 $H_1, H_2 \in X$ 和常数 $v > u \geq r$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_r^t H_1(v, s) H_2(s, u) \cdot \left\{ \lambda Q(s) - \frac{1}{4\lambda N g^{n-2}(s, a) g'(s, a)} \cdot \left(-\frac{h_1(v, s)}{\sqrt{H_1(v, s)}} + \frac{h_2(s, u)}{\sqrt{H_2(s, u)}} \right)^2 \right\} ds > 0$$

其中 h_1, h_2 由式 (22) 定义, 则边值问题 (E)、(B) 的所有解在 G 内振动。

定理 7 若对任意 $r \geq t_0$, 存在函数 $\rho(s) \in C^1(I, \mathbf{R}_+)$ 和常数 $\alpha, \beta > 1, v > u \geq r$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_r^t \rho(s) (v-s)^\alpha (s-u)^\beta (\lambda Q(s) - \frac{1}{4\lambda N g^{n-2}(s, a) g'(s, a)} \left(\frac{\beta v - (\alpha + \beta)s + \alpha u}{(v-s)(s-u)} \right)^2) ds > 0$$

则边值问题 (E)、(B) 的所有解在 G 内振动。

参考文献:

- [1] LI Y K. Oscillations of systems of hyperbolic differential equations with deviating arguments [J]. Acta Math Sinica, 1997, 40(1): 100 - 105.
- [2] GUAN X P, YANG J. Oscillation of systems of nonlinear hyperbolic partial functional differential equations of neutral type [J]. J Sys Sci & Math Scis, 1998, 18(2): 239 - 246.
- [3] LI W N, CUI B T. Oscillation for systems of neutral delay hyperbolic differential equations [J]. Indian J Pure Appl Math, 2000, 31: 933 - 948.
- [4] DENG L H, GE W G, YU Y H. Oscillation of systems of quasilinear parabolic functional differential equations about boundary value problems [J]. Acta Math Appl Sinica, 2001, 24(2): 295 - 301.
- [5] LI W N, CUI B T, DEBNATH L. Oscillation of systems of certain neutral delay parabolic differential equations [J]. J Appl Math Stochastic Anal, 2003, 16(1): 83 - 94.
- [6] WANG P G, WU Y H. Oscillation of solutions for systems of hyperbolic equations of neutral type [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2004, 2004(80): 1 - 8.
- [7] DENG L H, MU C L. Oscillation of solutions of the systems of quasilinear hyperbolic equations under nonlinear boundary condition [J]. Acta Math Scientia, 2007, 27B(3): 656 - 662.
- [8] KIGURADZE I T. On the oscillation of solutions of the equation $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t) |u|^m \operatorname{sgn} u = 0$ [J]. Maht Sb, 1964, 65(1): 172 - 187.
- [9] PHILOS C G. A new criterion for oscillatory and asymptotic behavior of delay differential equations [J]. Bull Acad Pol Sci Ser Sci Mat, 1981, 29: 367 - 370.